Université Ibn Tofail
ENSA – Kenitra.

Traitement de signal

EX1. – Déterminer le potentiel $V(x,y)$ à l'intérieur d'un prisme carré dont trois faces sont maintenues au potentiel zéro, tandisque la quatrième est portée au potentiel V_0.

EX2. – 1°) En écrivant le développement en série de Fourier de la fonction impaire, 2π-périodique et valant $\operatorname{ch} tx$ si $0<x<\pi$, t fixé, prouver l'identité

$$\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}} = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{2p+1}{(2p+1)^2+t^2}.$$

2°) En développant $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$ selon les puissances de e^{-x}

Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos xt}{\operatorname{ch} x}\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\pi t}{2}}$ et

en déduire la transformée de Fourier de $x \longmapsto \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.

3°) En déduire que $x \longmapsto \frac{1}{\operatorname{ch}\pi x}$ représente un signal fractal auto-transformable.

Université Ibn Tofaïl | Semestre 4
ENSA - Kenitra.

Traitement de Signal

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Pour $t \in [-\pi, \pi]$ on pose $f_\alpha(t) = \cos \alpha t$

① Calculer la série de Fourier de f_α et préciser la nature de sa Convergence.

En déduire que

$$\cot \alpha\pi = \frac{1}{\alpha\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}$$

et que

$$\cot t = \frac{1}{t} + 2t \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{t^2 - n^2\pi^2}$$

Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

② Soit $f : [0, x] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \cot t - \frac{1}{t}$ si $t \neq 0$ et $f(0) = 0$
$(x \in]0, \pi[)$

Prouver que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\,dt$ et

que $\displaystyle\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$

③ Préciser la nature de la Conv. de $\displaystyle\sum \frac{d}{dt}\left(\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}\right)$ sur $[0, x]$

et Prouver que $\displaystyle -\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} = -\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{(x - n\pi)^2}$.